Universität Heidelberg Wintersemester 2013/14

Aufgabenblatt 11 9. Januar 2014

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker I

Dr. Alexandra Köthe

Abgabetermin: 16. Januar 2014, 11:10 Uhr, im Foyer des Instituts für Reine Mathematik (INF 288).

Aufgabe 1

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass A über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar ist, aber über $\mathbb{C}$.

b) Berechnen Sie die (komplexen) Eigenvektoren von A und zeigen Sie, dass diese zueinander komplex konjugiert sind (das bedeutet, dass beide Komponenten jeweils komplex konjugiert zueinander sind). Schreiben Sie die Eigenvektoren in der Form $v \pm iw$, wobei $v, w \in \mathbb{R}^2$ liegen.

c) Zeigen Sie, dass v, w linear unabhängig sind und berechnen Sie die Darstellungsmatrix des Endomorphismus $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis $B = \{v, w\}$.

6 Punkte

Aufgabe 2

Sei $A \in \mathrm{Mat}_K(n, n)$ eine quadratische, diagonalisierbare Matrix vom Rang $r \leq n$. Zeigen Sie, dass A genau r Eigenwerte hat, die ungleich null sind und $n - r$ Eigenwerte gleich null sind. *2 Punkte*

Aufgabe 3

Sei $A \in \mathrm{Mat}_K(n, n)$ ein quadratische Matrix mit den Einträgen a_{ij}. Wir definieren die Spur der Matrix als die Summe ihrer Diagonaleinträge

$$\mathrm{Spur}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

a) Zeigen Sie für 2×2-Matrizen, dass die Spur der Matrix A gleich der Spur des charakteristischen Polynoms $\chi_A(t)$ ist und das die Determinante $\det A$ gleich der Norm von $\chi_A(t)$ ist. Folgern Sie daraus, dass für diagonalisierbare Matrizen gilt:

$$\mathrm{Spur}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \qquad \det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

wobei λ_1, λ_2 die Eigenwerte von A sind.

b) Seien $V = W = \mathrm{Mat}_K(n, n)$. Zeigen Sie, dass durch

$$B : V \times V \to K, (A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(A \cdot B)$$

eine Bilinearform definiert ist. Ist diese Bilinearform symmetrisch?

4 Punkte

Aufgabe 4

Seien die linear unabhängigen Vektoren

$$v_1 = (1, 2, 0)^\top \quad v_2 = (0, -1, 1)^\top \quad \text{und} \quad v_3 = (-1, 0, -1)^\top$$

gegeben. Bestimmen Sie ausgehend von diesen Vektoren mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts. *4 Punkte*