Universität Heidelberg Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 12 5. Juli 2013

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Physiker II

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra
Dipl. Math. Alexandra Köthe

Abgabetermin: 12. Juli 2013, 11:14 Uhr, im Foyer des Instituts für Reine Mathematik (INF 288).

Bemerkung: Wir betrachten $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik versehen.

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Verwenden Sie dafür (gegebenenfalls nach einigen Umformungen) die Regeln von l'Hospital:

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\log(x+1)}\right)$

b) $\lim_{x\to 0}(1+\arctan x)^{1/x}$

c) $\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin x}{\sqrt{1-x}}$

d) $\lim_{x\to\infty} x^{1/\sqrt{x}}$

4 Punkte

Aufgabe 2

a) Sei $f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ durch $f(x)=\log(\cos x)$ definiert. Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom $t_2(x_0,x)$ an der Stelle $x_0=0$ und zeigen Sie, dass für $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ für das Restglied $r_3(x)=f(x)-t_2(0,x)$ gilt:
$$|r_3(x)|\le\frac{2}{3}x^3,$$
wobei $r_3(x)$ das Restglied bezeichnet.

b) Entwickeln Sie die Funktion $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$
$$f(x)=\frac{x(1-x^2)}{(1+x)^3}$$
in eine Taylorreihe um $x_0=0$. Zeigen Sie, dass diese Taylorreihe für $x\in\mathbb{C}$ mit $|x|<1$ die Funktion f darstellt.

6 Punkte

Aufgabe 3

Für eine stetig differenzierbare Funktion $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definieren wir
$$\operatorname{div} F=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}F_i,\qquad \operatorname{rot} F:=\left(\frac{\partial}{\partial x_2}F_3-\frac{\partial}{\partial x_3}F_2,\frac{\partial}{\partial x_3}F_1-\frac{\partial}{\partial x_1}F_3,\frac{\partial}{\partial x_1}F_2-\frac{\partial}{\partial x_2}F_1\right).$$
Für $f\in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ ist $\operatorname{grad} f=\nabla f$ der Gradient.
Zeigen Sie, dass für $F\in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ und $f\in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ gilt:

a) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f=0$,

b) $\operatorname{div}\operatorname{rot} F=0$.

2 Punkte

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\sin(x)\sin(y)$. Finden Sie alle Maxima, Minima und Sattelpunkte.

4 Punkte