Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 2

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Chris Kowall

`http://www.biostruct.uni-hd.de/PartielleDifferentialgleichungen.php`

Abgabe: 6. November, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 2.1 4 Punkte

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} uu_x + u_t = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \quad u(r,0) = \alpha r & \text{für} \quad r \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

auf $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$. Finden Sie eine explizite Lösung $u \in C^1$ von (1) mithilfe der Methode der Charakteristiken für jeden Parameter $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und bestimmen Sie jeweils das maximale Existenzintervall in Ω.

Aufgabe 2.2 4 Punkte

Finden Sie zur Burgers-Gleichung

$$\begin{cases} uu_x + u_t = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \quad u(r,0) = g(r) & \text{für} \quad r \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

auf $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$ mithilfe der Methode der Charakteristiken eine lokale stetige Lösung und untersuchen Sie wie die gewonnene lokale Lösung für endliche Zeiten unstetig wird. Verwenden Sie dazu die Anfangsdaten $g \in C(\mathbb{R})$ mit

$$g(r) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad r \leq 0, \\ 1 - r & \text{für} \quad 0 \leq r \leq 1, \\ 0 & \text{für} \quad r \geq 1. \end{cases}$$

Aufgabe 2.3 4 Punkte

Für $1 \leq p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen sei

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \{f \in W^{1,p}(\Omega) \mid \exists \, (f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega) \text{ mit } \|f - f_k\|_{1,p} \to 0 \text{ für } k \to \infty\}.$$

Zeigen Sie, dass für $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \times (-L, L)$ für ein $L > 0$ die folgende Poincaré-Ungleichung

$$\|u\|_p \leq 2L \|\nabla u\|_p \qquad \forall \, u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

gilt.