Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 6

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Chris Kowall

http://www.biostruct.uni-hd.de/PartielleDifferentialgleichungen.php

Abgabe: 4. Dezember, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 6.1 4 Punkte

Sei $n \in \mathbb{N}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^1$. Außerdem seien $f \in C(\overline{\Omega})$ und $g \in C(\partial\Omega)$. Definiere auf

$$\mathcal{A} := \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \mid u = g \text{ auf } \partial\Omega\}$$

die Energie als Funktional von $u \in \mathcal{A}$ durch

$$E(u) := \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - fu \, \mathrm{d}x.$$

Beweisen Sie, dass $u \in \mathcal{A}$ genau dann ein Minimierer von E in $\mathcal{A}$ ist wenn u das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in} \quad \Omega, \\ \quad u = g & \text{auf} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

löst. Ein Minimierer $u \in \mathcal{A}$ ist hierbei definiert durch $E(u) \le E(v)$ für alle $v \in \mathcal{A}$.

Hinweis. Machen Sie sich für $u \in \mathcal{A}$ klar, dass Funktionen der Form $u + t\varphi$ für $t \in \mathbb{R}$ und gewisse Funktionen φ wiederum in $\mathcal{A}$ liegen.

Aufgabe 6.2 4 Punkte

Seien $m, n \in \mathbb{N}, 1 \le p \le n$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^m$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für $mp < n$ gilt $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für alle $1 \le q \le q^*$ mit

$$\frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}.$$

(b) Für $mp = n \ge 2$ gilt $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für alle $1 \le q < \infty$.

Hierbei bezeichnet $X \hookrightarrow Y$ eine stetige Einbettung des Raums X in Y, d.h. es gibt eine Abschätzung der Form

$$\|u\|_Y \le C\|u\|_X \qquad \forall\, u \in X.$$

Aufgabe 6.3 4 Punkte

Für $n \in \mathbb{N}, n < p < \infty$ seien $\alpha = 1 - n/p$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge und $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass es einen Hölder-stetigen Vertreter $\tilde{u} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ gibt mit $\tilde{u} = u$ f.ü. in Ω und für $C = C(n, p, \Omega) > 0$

$$\|\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \le C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^n}$$

gilt. Dabei ist die entsprechende Hölder-Norm gegeben durch

$$\|\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \sup_{x \in \overline{\Omega}} |\tilde{u}(x)| + \sup_{x \neq y \in \overline{\Omega}} \frac{|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

und $(C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})})$ ein Banachraum.

Hinweis. Zeigen Sie die Aussage zunächst für $u \in C_c^1(\Omega)$ und schätzen Sie für $x_1, x_2 \in \Omega$ die Differenz $u(x) - u(x_i)$ für $x \in B := B_\rho((x_1 + x_2)/2)$ mit Radius $\rho := |x_1 - x_2|$ geeignet ab und integrieren Sie.